

מיקרו 2 - יעילות בחליפין - תוכן עניינים

- 2.....כלכלת רווחה (יעילות).....
- 3.....דוגמא נוספת להמחשת מושגי השליטה והיעילות פארטו – בטבלה.....
- 4.....חלק א' - יעילות פארטו בכלכלת חליפין.....
- 4.....מציאת הקצאות יעילות פארטו במצב הסטנדרטי.....
- 6.....מציאת קו החוזה הפנימי במצב הסטנדרטי – דוגמא עם פונקציות קוב-דאגלס.....
- 7.....מציאת קו החוזה הכולל במצב הסטנדרטי – קו חוזה שאינו קו ישר.....
- 9.....מציאת קו החוזה הכולל במצב הסטנדרטי – דוגמא עם קוב-דאגלס ולינארי.....
- 10.....מציאת קו החוזה הכולל במצב הסטנדרטי – פונקציית קוואזי לינארית.....
- 12.....מציאת קו החוזה הכולל במצב הסטנדרטי – 2 פרטים לינאריים.....
- 13.....מצבים לא סטנדרטים כלליים.....
- 13.....מצבים לא סטנדרטים כלליים (פונקציות חריגות) – שאלה לדוגמא.....
- 15.....פונקציית מינימום.....

כלכלת רווחה (יעילות)

- שם כולל לכלכלות בעלות מתכנן מרכזי אשר מטרתו רווחה חברתית כמה שיותר גדולה.
- בעיית המתכנן המרכזי : ישנם משאבים מוגבלים (מוצרים/ גורמי ייצור) אשר צריך לחלק אותם בין הגורמים בכלכלה (צרכנים/ יצרנים).
- פתרון הבעיה – יעילות פארטו : המתכנן המרכזי רוצה לחלק את המשאבים כך שלא יהיה ניתן להגיע באמצעות שינוי למשהו "טוב יותר" (= לשפר), כי במידה וניתן לשפר אז ההקצאה המקורית לא יעילה. **במידה ולא ניתן לשפר – ההקצאה יעילה!**
- אם באמצעות החלפה בין הגורמים בכלכלה שיפרנו מצב של לפחות אחד מבלי לפגוע באף אחד – זה נקרא "שיפור פארטו" + ההקצאה המקורית "נשלטת פארטו" ע"י ההקצאה החדשה => ההקצאה המקורית אינה יעילה!

דוגמת גן הילדים :



לסיכום, יעילות פארטו – ההגדרה (לזכור לכל הקורס!):

הקצאות יעילות פארטו הן הקצאות שבהן לא ניתן לשפר פארטו – כלומר לא ניתן לשפר מצב של לפחות אחד מבלי לפגוע באף אחד.

סל	פרט 1	פרט 2
A	8	8
B	9	10
C	21	5
D	9	11

{הערה : ניתן להסתכל על המספרים בטבלה ככמות ממוצר מסויים או כרמת תועלת – כרגע זה לא משנה}

* בעולם של A ו-B :

A – נשלטת ע"י B, כי במעבר מ-A ל-B שני הפרטים מרוויחים (שיפור פארטו) $A \leq B$ לא יעילה.
B – שולטת פארטו על ההקצאה היחידה שמולה במשק $\leq$ אינה נשלטת ע"י אף הקצאה אחרת $B \leq$ יעילה.

* בעולם של A, B, C :

A – עדיין כמובן נשלטת ע"י B $A \leq B$ לא יעילה.

B – נבדוק האם B נשלטת ע"י הקצאה אחרת במשק באמצעות מעבר מ-B לכל הקצאה בנפרד ובדיקה האם ביצענו שיפור פארטו :

• $A \leftarrow B$: כבר הראינו שמדובר בהרעה פארטו ולכן B אינה נשלטת ע"י A.

• $C \leftarrow B$: פרט 1 מרוויח ופרט 2 מפסיד, כלומר לא ביצענו שיפור פארטו במעבר מ-B ל-C ולכן B אינה נשלטת ע"י C.

מסקנה : B אינה נשלטת פארטו ע"י אף הקצאה אחרת במשק $B \leq$ יעילה.

C – נבדוק האם C נשלטת ע"י הקצאה אחרת במשק באמצעות מעבר מ-C לכל הקצאה בנפרד ובדיקה האם ביצענו שיפור פארטו :

• $A \leftarrow C$: פרט 1 מפסיד ופרט 2 מרוויח, כלומר לא ביצענו שיפור פארטו במעבר מ-C ל-A ולכן C אינה נשלטת ע"י A.

• $B \leftarrow C$: פרט 1 מפסיד ופרט 2 מרוויח, כלומר לא ביצענו שיפור פארטו במעבר מ-C ל-B ולכן C אינה נשלטת ע"י B.

מסקנה : C אינה נשלטת פארטו ע"י אף הקצאה אחרת במשק $C \leq$ יעילה.

* בעולם של A, B, C, D :

כעת B נשלטת ע"י D ולכן כבר לא יעילה, C ו-D יעילות כי לא נשלטות ע"י אף הקצאה אחרת.

הערות :

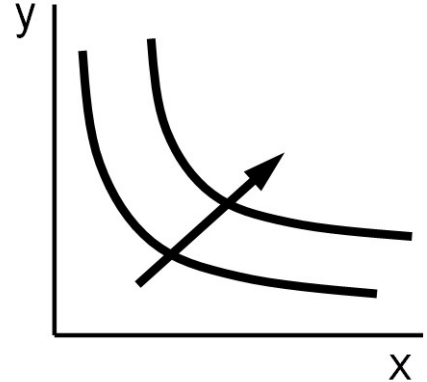
- לא ניתן להשוות בין שתי הקצאות יעילות פארטו מאחר ובמעבר ביניהן אחד נפגע והשני מרוויח.
- יש לזכור כי הקצאה פ"י אינה בהכרח שולטת פארטו על הקצאה שאינה פ"י. לדוגמא: בעולם של A, B, C - פ"י ו-A אינה פ"י אך C אינה שולטת פארטו על A.

חלק א' - יעילות פארטו בכלכלת חליפין

- כלכלת חליפין - פרטים צורכים מוצרים אשר נותנים להם תועלת.
- המטרה (תחת כלכלת רווחה) : חלוקת המוצרים בין הפרטים בצורה יעילה פארטו.
- המצב הסטנדרטי : 2 צרכנים הצורכים את אותם 2 מוצרים (טובים) + עקומות אדישות של פונקציות התועלת מתנהגות יפה/לינאריות.

* תזכורת ממיקרו I - על עקומות אדישות והתנהגות יפה :

עקומות אדישות : עקומה המתארת אוסף הקצאות (צירופים של X ו- Y) שהפרט אדיש ביניהן, כלומר על עקומת אדישות לפרט תועלת קבועה.



MRS : שיפוע עקומת האדישות ; אלגברית - $MRS = \frac{m_{ux}}{m_{uy}}$

כלכלית - כמה יחידות Y צריך להחליף עם יחידת X אחת כדי להישאר באותה תועלת (=) השווי השולי של יחידת X במונחי יחידות Y עבור הפרט).

התנהגות יפה : מצב בו עקומות האדישות של הפרט קמורות לראשית, MRS הולך ופוחת בהגדלת X והקטנת Y .

מציאת הקצאות יעילות פארטו במצב הסטנדרטי

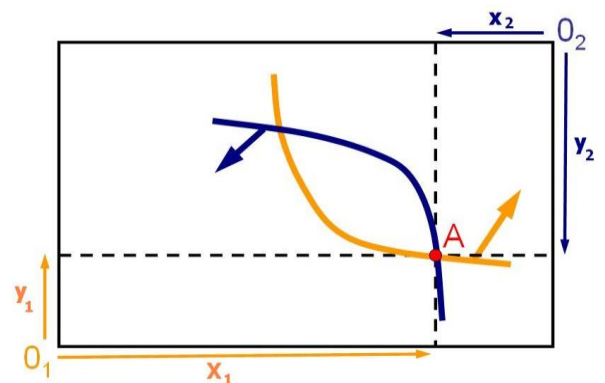
(א) הקצאות פנימיות

הגדרה – הקצאות פנימיות הן הקצאות בהן לשני הפרטים כמויות חיוביות משני המוצרים.

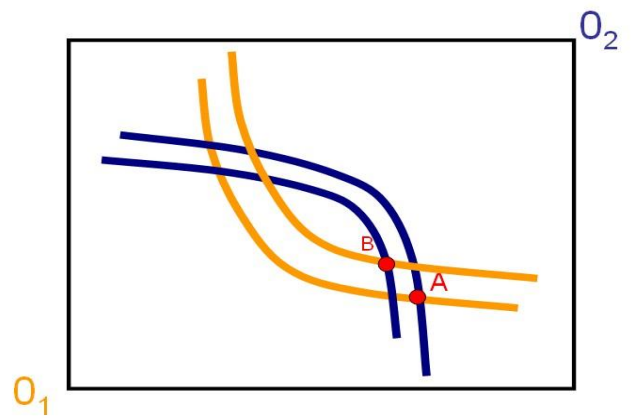
התנאי ליעילות : $MRS_1 = MRS_2$

הסבר כלכלי :

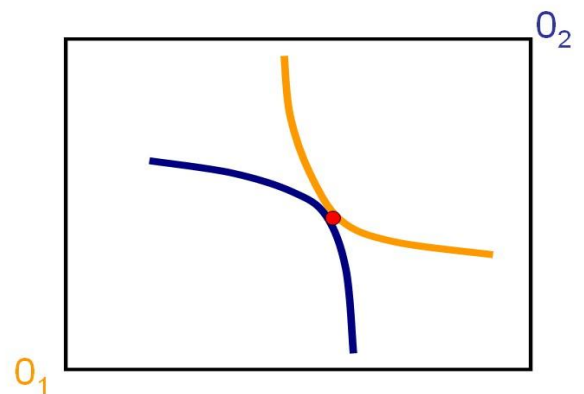
הסבר נוסף לתנאי ליעילות פנימית באמצעות הצגה גרפית - תיבת אדג'וורת :



בנק' A עקומות האדישות נחתכות, לכן נוצרת לנו "עדשה" – אם ניקח הקצאה בתוך העדשה נשפר פארטו כי נעלה את 2 הפרטים לעקומות אדישות גבוהות יותר.



נוכל לעשות הליך זה כל עוד תהיה עדשה, לכן נקרב את עקומות האדישות זו לזו עד אשר לא תהיה עדשה – כלומר עד אשר נגיע לנק' השקה של עקומות האדישות.

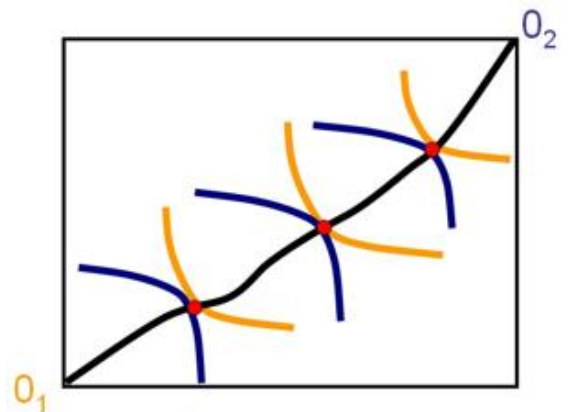


- * שמאלה ולמטה – שיפור 2 והרעה 1.
 - * שמאלה ולמעלה – הרעה של שניהם.
 - * ימינה ולמטה – הרעה של שניהם.
 - * ימינה ולמעלה – שיפור 1 והרעה 2.
- לא ניתן לשפר פארטו – ההקצאה יעילה.

* כלומר, התנאי של שיוויון MRS-ים הוא למעשה "תנאי השקה" (של עקומות האדישות).

אוסף ההקצאות היעילות פנימיות (= "קו החוזה הפנימי")

- ראינו כי נקודת השקה היא הקצאה יעילה (פנימית).
- אולם, יש הרבה נקודות השקה אפשריות בתיבה (כי התיבה היא למעשה מפת עקומת אדישות).
- לכן, נחפש את אוסף ההקצאות היעילות הפנימיות = אוסף נקודות ההשקה (או : "קו החוזה הפנימי").



בכלכלה הנתונים הבאים :

2 מוצרים - X, Y .

$$u(x_1, y_1) = x_1^{3/4} y_1^{1/4} \quad \text{2 צרכנים עם פונקציות התועלת -}$$

$$u(x_2, y_2) = x_2^{3/4} y_2^{1/4}$$

סך מקורות ה-X בכלכלה : 50. סך מקורות ה-Y בכלכלה : 40.

מצאו את אוסף ההקצאות היעילות פנימיות.

פתרון**בדיקת מצב סטנדרטי :** 2 צרכני קוב דאגלס (התנהגות יפה) עם אותם 2 מוצרים טובים (Y, X) סטנדרט מתקיים.

הערה - רק לצורך הבנה ראשונית : לפי MRS ניתן לראות אלגברית התנהגות יפה :

טיפ CD - 1 : נוסחה ל-MRS של CD -

$$MRS_1 = \frac{\frac{3}{4} \cdot X_1^{-\frac{1}{4}} \cdot Y_1^{\frac{1}{4}}}{X_1^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{4} \cdot Y_1^{-\frac{3}{4}}} = 3 \cdot X_1^{-1} \cdot Y_1 = \frac{3Y_1}{X_1} \Rightarrow \left(\frac{3Y_1 \downarrow}{X_1 \uparrow} \right) \downarrow$$

מעכשיו נזכור שקוב דאגלס (CD) מתנהג יפה ולכן סטנדרטי

מדובר במצב הסטנדרטי $\Rightarrow$ ניעזר ב"ארגז הכלים של יעילות פנימית בחליפין" :

$$MRS_1 = MRS_2 \Rightarrow \frac{3Y_1}{X_1} = \frac{3Y_2}{X_2} \Rightarrow \frac{Y_1}{X_1} = \frac{Y_2}{X_2}$$

מגבלת המקורות :

$$X_1 + X_2 = 50 \Rightarrow X_2 = 50 - X_1$$

$$Y_1 + Y_2 = 40 \Rightarrow Y_2 = 40 - Y_1$$

נציב במשוואת ההשקה כדי להגיע לקו במונחי 1 :

$$\frac{Y_1}{X_1} = \frac{\overset{40-Y_1}{\underset{50-X_1}{\hat{Y}_2}}}{\hat{X}_2} \rightarrow Y_1(50 - X_1) = X_1(40 - Y_1) \rightarrow \boxed{Y_1 = \frac{4}{5} X_1}$$

בדיקת ראשיות :

- מציבים על קו החוזה הפנימי $X_1=0$ ומקבלים $Y_1=0$, כלומר קו החוזה עובר בראשית של פרט 1.
- מציבים על קו החוזה הפנימי $X_1=50$ ומקבלים $Y_1=40$, כלומר קו החוזה מגיע לראשית של פרט 2.

*** כלל אצבע :**

דוגמא

בכלכלה הנתונים הבאים :

$$u_1 = \frac{1}{2} x_1^2 \cdot y_1, \quad u_2 = \frac{1}{4} x_2 \cdot y_2$$

$$\bar{x} = 10, \quad \bar{y} = 10$$

חשבו את אוסף ההקצאות היעילות פארטו (קו החוזה).

פתרון

בדיקת מצב סטנדרטי : 2 צרכנים עם אותם 2 מוצרים טובים + שניהם CD (מתנהגים יפה) – נשתמש בארגז הכלים :

* (1) שוויון MRSים $\leq$ (2) קו במונחי 1 :

$$MRS_1 = MRS_2 \rightarrow \frac{2y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \xrightarrow{\text{מגבלת מקורות}} \frac{2y_1}{x_1} = \frac{10-y_1}{10-x_1} \rightarrow \boxed{y_1 = \frac{10x_1}{20-x_1}}$$

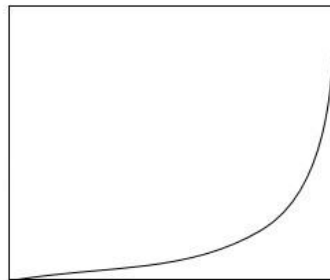
נשים לב כי קו החוזה הפנימי אינו קו ישר

- בבדיקת הראשיות רואים כי קו החוזה הפנימי מחבר בין שתי הראשיות אולם ראינו כי הוא אינו קו ישר, לכן השאלה כיצד הוא מתנהג.
- אצלינו בקורס יש 2 אופציות – או שהוא עובר כולו מעל האלכסון (בשיפוע הולך וקטן) או שהוא עובר כולו מתחת לאלכסון (בשיפוע הולך וגדל).
- יש כמה דרכים לבדוק זאת, נתרכז בפשוטה ביותר - נקודת מרכז התיבה :

○ נקודת מרכז התיבה היא 5,5 (כלומר, כל פרט מקבל 5 יחידות מכל מוצר)

○ נציב $X_1=5$ על קו החוזה ונקבל : $y_1 = \frac{10x_1}{20-x_1} = \frac{10 \cdot 5}{20-5} = \frac{50}{15} = 3\frac{1}{3} < 5$

○ לכן, קו החוזה עובר מתחת לאלכסון.



טיפ CD - 2 : כאשר שני הפרטים CD – קו החוזה תמיד מפגיש בין שתי הראשיות.



(ב) הקצאות פינתיות

- הגדרה : **הקצאות פינתיות** הן הקצאות בהן לפחות לאחד הפרטים יש אפס מלפחות אחד המוצרים.
- **הקצאות פינתיות** הן למעשה הדפנות של תיבת אדג'וורת.

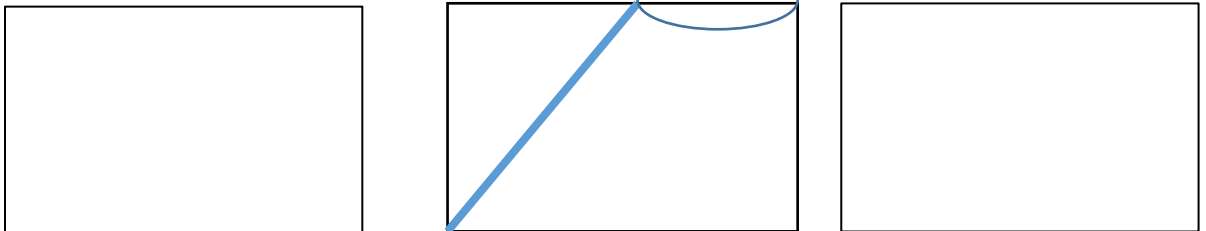


- בהקצאות פינתיות אין תנאי אלגברי שעלינו לדרוש אלא נשתמש בכלל האצבע הבא :



שיטת העבודה בהתאם לכלל האצבע :

- כאשר קו החוזה הפנימי אינו מפגיש בין הראשיות אלא **פוגע בדופן מסוימת** - נדע כי קטע הדופן אשר חסום בין קו החוזה הפנימי ובין הראשית הקרובה (= "**דופן רלוונטית**") מהווה את אוסף ההקצאות היעילות הפינתיות ("קו החוזה הפינתי") :



- **הסבר יעילות** : הדרישה במצב זה היא רק להוכיח או להסביר מדוע קטע הדופן הנ"ל הינו יעיל.

ההסבר מחולק ל-3 שלבים :

1. **בדיקת MRSים** – נבדוק איזה MRS יותר גדול על הדופן הרלוונטית וכך נדע מי מהפרטים יותר אוהב X ומי יותר אוהב Y.
2. **כיוון השיפור** - נסביר מהו כיוון השיפור פארטו – כלומר איזו החלפה כדאית יש לבצע כדי לשפר.
3. **מוצר אפס** – נראה שעל הדופן לאחד הצרכנים אין מה לתת כדי לבצע את ההחלפה ולכן הדופן יעילה.

בכלכלה הנתונים הבאים :

2 מוצרים – X, Y

$$u_1(x_1, y_1) = 3x_1y_1 \quad \text{2 צרכנים -}$$

$$u_2(x_2, y_2) = 4x_2 + 4y_2$$

סך מקורות ה-X : 40

סך מקורות ה-Y : 30

מצאו את אוסף ההקצאות היעילות פארטו.

פתרוןסעיף א'**בדיקת מצב סטנדרטי :** שני פרטים עם 2 מוצרים טובים + אחד CD ואחד לינארי :

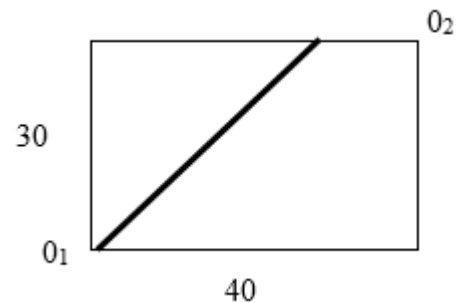
נתחיל מארגז הכלים של יעילות פנימית בחליפין

$$MRS_1 = \frac{y_1}{x_1} \quad MRS_2 = \frac{4}{4} = 1 \rightarrow \frac{y_1}{x_1} = 1 \rightarrow \boxed{y_1 = x_1}$$

(נשים לב שכאן לא היה צורך בהצבת מגבלת המקורות מאחר שאחד הפרטים לינארי)

בדיקת ראשיות :

- מציבים על קו החוזה הפנימי $X_1=0$ ומקבלים $Y_1=0$, כלומר קו החוזה עובר בראשית של פרט 1.
- מציבים על קו החוזה הפנימי $X_1=40$ ומקבלים $Y_1=40$, כלומר הנקודה נמצאת מחוץ לתיבה - אנכית לראשית של פרט 2, ולכן קו החוזה מתנגש עם הדופן העליונה.



נעבור להסבר יעילות פינתית – 3 השלבים

1. **בדיקת MRSים :** לאורך הדופן הרלוונטית מתקיים $MRS_2 = 1$, $MRS_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{30}{30^+} < 1$, כלומר $MRS_1 < MRS_2$.2. **כיוון השיפור :**

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{x_1} \\ MRS_1 < MRS_2 \\ \xleftarrow{y_2} \end{array}$$

3. **מוצר אפס :** על הדופן הרלוונטית $y_2=0$ לא ניתן לשפר $\leq$ ההקצאות על הדופן היעילות פארטו.

בכלכלה הנתונים הבאים :

$$u_1 = 2\sqrt{x_1} + 0.1y_1 \quad , \quad u_2 = x_2 + y_2$$

$$\bar{x} = 200 \quad , \quad \bar{y} = 200$$

מצאו את ההקצאות היעילות (קו החוזה).

פתרון

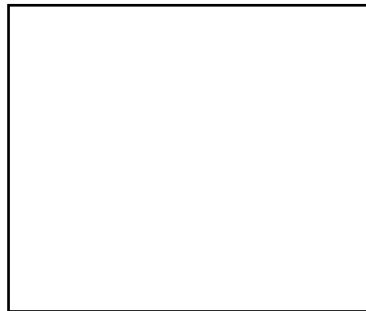
$$MRS_1 = \frac{\frac{2}{2\sqrt{x_1}}}{0.1} = \left(\frac{10}{\sqrt{x_1} \uparrow} \right) \downarrow$$

[פרט קוואזי לינארי מתנהג יפה - חלק מהמצב הסטנדרטי].

$$MRS_1 = MRS_2 \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{x_1}} = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 100}$$

קיבלנו קו חוזה פנימי אנכי!

* כאמור לעיל – קו החוזה הפנימי הוא קו אנכי באמצע התיבה $\Rightarrow$ ברור כי לא מפגיש בין הראשיות :



כעת נסביר מדוע הדפנות הרלוונטיות יעילות :

* דופן עליונה ימנית :

1. בדיקת MRS : לאורך הדופן הרלוונטית מתקיים $MRS_2 = 1$, $MRS_1 = \frac{10}{\sqrt{x_1}} = \frac{10}{\sqrt{100+}} < 1$, כלומר $MRS_1 < MRS_2$.

2. כיוון השיפור :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{x_1} \\ MRS_1 < MRS_2 \\ \xleftarrow{y_2} \end{array}$$

3. מוצר אפס : על הדופן $y_2=0$, כלומר לא ניתן לבצע את השיפור פארטו ולכן הדופן יעילה.

* דופן תחתונה שמאלית :

1. בדיקת MRS : לאורך הדופן הרלוונטית מתקיים $MRS_2 = 1$, $MRS_1 = \frac{10}{\sqrt{x_1}} = \frac{10}{\sqrt{100}} > 1$, כלומר $MRS_1 > MRS_2$.

2. כיוון השיפור :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{Y_1} \\ MRS_1 > MRS_2 \\ \xleftarrow{X_2} \end{array}$$

3. מוצר אפס : על הדופן $Y_1=0$, כלומר לא ניתן לבצע את השיפור פארטו ולכן הדופן יעילה.

דוגמא

בכלכלה הנתונים הבאים :

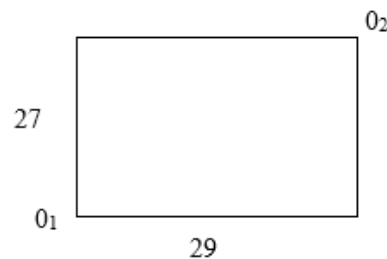
$$u_1 = 3x_1 + y_1 \quad , \quad u_2 = x_2 + 3y_2$$

$$\bar{x} = 29 \quad , \quad \bar{y} = 27$$

חשבו את אוסף ההקצאות היעילות פארטו (קו החוזה).

פתרון**בדיקת מצב סטנדרטי :** 2 פרטים הצורכים את אותם 2 מוצרים טובים + שניהם לינאריים $\Rightarrow$ מצב סטנדרטי מתקיים $\Rightarrow$

$$MRS_1 = 3 \neq MRS_2 = \frac{1}{3} \quad \Leftarrow \quad \text{תמיד אין השקה} = \text{אין קו חוזה פנימי.}$$



* מאחר ואין קו חוזה פנימי כל הדפנות רלוונטיות.

הסבר יעילות פינתית :

- **בדיקת MRS** : בכל דופן מתקיים $MRS_1 > MRS_2$.- **כיוון השיפור** :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{y_1} \\ MRS_1 > MRS_2 \\ \xleftarrow{x_2} \end{array}$$

- **מוצר אפס** : כאשר $Y_1=0$ או $X_2=0$ אז לא ניתן לשפר פארטו ולכן ההקצאות יעילות. לכן, ההקצאות על הדפנות הנ"ל הן קו החוזה הפינתי (שהוא גם הכולל).חישוב : כיצד הייתה משתנה תשובתכם אילו היה נתון כי $u_1 = 8x_1 + 2y_1 \quad , \quad u_2 = 4x_2 + y_2$?תשובה : שוויון MRS-ים מתקיים בכל נקודה ונקודה ולכן כל התיבה יעילה (כולל הדפנות).

- למדנו כי המצב הסטנדרטי הינו 2 צרכנים שצורכים אותם 2 מוצרים טובים + התנהגות יפה/לינארי.
- אולם, ייתכנו שאלות שבהן יש כמויות אחרות של צרכנים, צורות חריגות של פונקציות תועלת, מוצרים רעים ועוד.
- בשאלות אלו לא נוכל להשתמש בסדר הפעולות הרגיל ואין דרך הסתכלות ספציפית אלא ניאלץ להפעיל חשיבה כלכלית בהתאם להיגיון שעומד מאחורי העיקרון של יעילות פארטו.

מצבים לא סטנדרטים כלליים (פונקציות חריגות) – שאלה לדוגמא

בכלכלה 3 מוצרים (X, Y, Z) ו-3 פרטים עם ההעדפות הבאות :

$$u_1 = y \quad u_2 = 2y - x + z \quad u_3 = \sqrt{x} + \sqrt{z}$$

א. מצאו את ההקצאות הפ"י בכלכלה זו.

ב. $\{ *קשה \}$ כיצד היתה משתנה תשובתכם אם פונקציית התועלת של פרט 1 הייתה נתונה ע"י $u_1 = y + z$?

* בדיקת מצב סטנדרטי : יש 3 פרטים, 3 מוצרים והעדפות חריגות (ובפרט אינן מתנהגות יפה) $\leq$ לא ניתן להשתמש בארגז כלים 1.

* בנתח תחילה כל פרט בנפרד :

- פרט 1 נהנה רק מ-y ולכן בהקצאה פ"י מתחייב כי $x_1=z_1=0$.

- פרט 2 נהנה מ-Y ומ-Z אך סובל מ-X ולכן בהקצאה פ"י מתחייב כי $x_2=0$.

- פרט 3 נהנה רק מ-X ו-Z ולכן בהקצאה פ"י מתחייב כי $y_3=0$.

* בנוסף, בהקצאה פ"י חייב להתקיים שהפרטים מקבלים את כל המקורות (אלא אם כן מוצר מסויים הוא רע לכולם).

* לכן, ההקצאות הפ"י הן כל ההקצאות שמקיימות את התנאים הבאים :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \bar{x} + x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = \bar{x} \\ y_1 + y_2 + y_3 &= \bar{y} + y_3 = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 = \bar{y} \\ z_1 + z_2 + z_3 &= \bar{z} + z_1 = 0 \Rightarrow z_2 + z_3 = \bar{z} \end{aligned}$$

שימו לב – חשוב להבין : מאחר שבין כל זוג פרטים יש רק מוצר אחד להחלפה אז בכל שינוי שנעשה נפגע באחד ונשפר את השני, לכן כל הקצאה שתחלק את y בין פרטים 1 ו-2 ואת z בין פרטים 2 ו-3 הינה פ"י (לא ניתן לשפר פארטו כי תמיד משהו ייפגע).

לגבי פרט 3 ומוצר X אין שינוי – עדיין $x_3 = \bar{x}$. אולם, כעת לפרטים 1 ו-2 יש שני מוצרים ששניהם נהנים מהם.

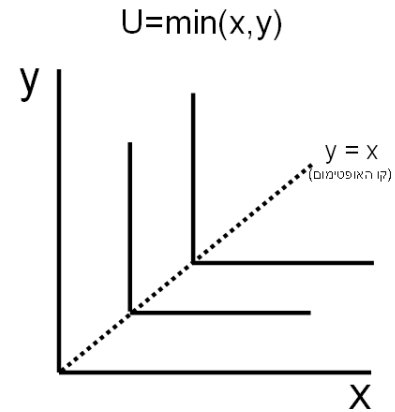
לכן, יש לבחור כמות כלשהי של z אשר תוקצה לפרט 3 (אשר יכולה להיות גם אפס) ואז לחלק את המקורות $\bar{y}$, $\bar{z} - z_3$,

בצורה יעילה בין פרטים 1 ו-2. בדומה לדוגמא הקודמת על שני פרטים לינאריים נגיע לכך שהדפנות $y_1=0$ ו- $z_2=0$ הינן יעילות פארטו.

ראשית, תזכורת ממיקרו 1 - על פונקציית תועלת $\min$:

- תועלת מינימום מבוטאת (בד"כ) בצורה הבאה : $u_i = \min(x_i, y_i)$ (ייתכנו גם מקדמים על x ו- y).
- המשמעות היא שהתועלת נקבעת לפי הנמוך מבין שני המוצרים.
- לדוגמא – x כפפה ליד ימין ו- y כפפה ליד שמאל – אם יש לנו 1000 כפפות ליד ליד וכפפה אחת ליד שמאל אז למעשה יש לנו זוג כפפות 1 ומכאן שהתועלת היא 1.

• גרפית :



הקצאות יעילות

- ברוב הדוגמאות בקורס למדנו כי על מנת למצוא את ההקצאות היעילות יש לעשות שוויון MRS.
 - **אבל, שימו לב :** לפונקציית $\min$ אין MRS – מדובר במצב לא סטנדרטי – לכן לא ניתן להשתמש בשלבים הרגילים.
 - **ניעזר בטיפ :** אם אנחנו בהקצאות פנימיות (= לשני הפרטים כמות חיובית מ-2 המוצרים = הפנים של תיבת אדג'וורת) ומדובר בפרט מינימום מול פרט "רגיל" (שאינו מינימום) אז ביעילות חייבים להיות על קו האופטימום של המינימום $\leq$ וזהו קו החוזה!
- # ואם מדובר ב-2 פרטי מינימום – ההקצאות היעילות הן כל ההקצאות שבין 2 קווי האופטימום שלהם.

$$u_A(x_A, y_A) = \min\{x_A, y_A\} \qquad u_B(x_B, y_B) = x_B + y_B$$

$$\bar{x} = 20 \quad \bar{y} = 15$$

- א. מהו קו החזוזה הפנימי?
 ב. מהו קו החזוזה הפינתי?
 ג. כיצד תשתנה תשובתכם לסעיפים הקודמים במידה ותועלת פרט B היא קוב-דאגלס? {ללא סרטון}

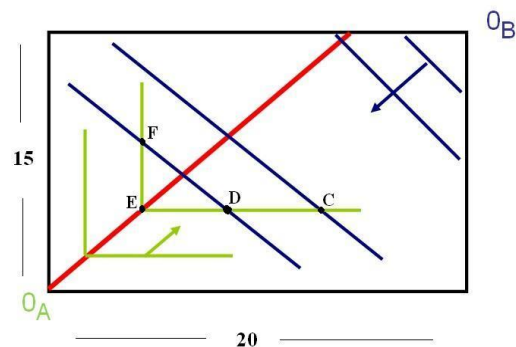
פתרון

סעיף א' - הקצאות פנימיות :

- קו האופטימום של פרט A הוא $y_A = x_A$; לפי הטיפ זהו גם קו החוזה הפנימי!
- הסבר פשוט : כל הקצאה שמקיימת $y_A \neq x_A$ היא אינה יעילה משום שהבאנו למינימום יותר מדי X או Y שלא נותנים לו תועלת, אך מוסיפים תועלת לפרט אחר. לכן מתחייב שביעילות ניתן לו $y=x$, ואת "השאר" לפרט השני.

* הסבר מפורט (לא נדרש במבחן – אלא להבנה שלכם):

- אם ניקח הקצאה אשר אינה על קו זה, נוכל לבצע שיפור פארטו במידה וניקח הקצאה אחרת אשר קרובה יותר לקו.
- נמחיש זאת באמצעות הגרף הבא :



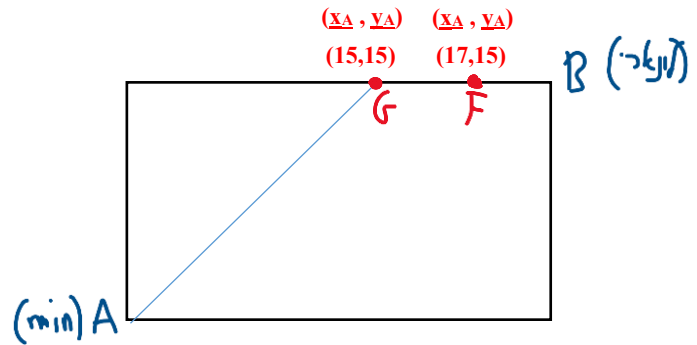
* נסתכל תחילה על הקצאה C :

- אם נלך אופקית לכיוון קו האופטימום עד לנקודה D, נעביר את הפרט הלינארי לעקומת אדישות גבוהה יותר, בעוד שנשארו על אותה עקומת אדישות של פרט המינימום.
 - כלומר, ביצענו שיפור פארטו - ולכן הקצאה C אינה יעילה.
 - נוכל לבצע הליך זה עד אשר נגיע לנקודה E, אשר נמצאת על הקו.
 - מסקנה : כל ההקצאות שמימין לקו אינה יעילה.
- * אותו הסבר נכון לגבי הקצאה F (ניתן לרדת למטה לקו האופטימום ולשפר), ולכן כל ההקצאות שמשמאל לקו אינן יעילות גם הן.
- * לעומת זאת, אם ניקח הקצאה על קו האופטימום (E למשל) ונסה לעבור להקצאה אחרת כדי לשפר פארטו – לא נצליח, משום שאחד ירוויח והשני יפסיד או שאחד לא ישתנה והשני יפסיד (הרעה פארטו). כלומר, ההקצאות על הקו הן יעילות.

סעיף ב' - הקצאות פינתיות :

אותו הסבר אשר נכון להקצאות הפנימיות נכון במקרה זה גם בהקצאות הפינתיות – בכל דופן בתיבה למעשה מתקיים $y_A \neq x_A$, כלומר יש לפרט המינימום יותר X או Y שלא נותנים לו תועלת. ניתן לבצע שיפור פארטו אם נעביר את יחידות ה- Y/X העודפות לפרט השני. מכאן, אין הקצאות פינתיות יעילות.

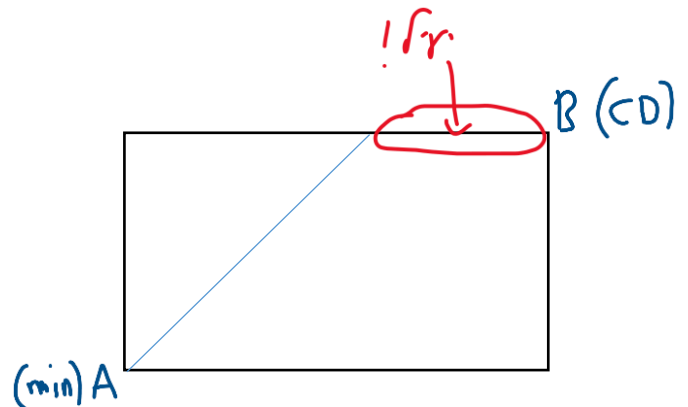
לא נדרש במבחן אלא להבנה שלכם - נדגים על קטע הדופן המוכר לנו מהמצב הסטנדרטי :



בנקודה הפינתית F יש לפרט A המינימום 2 יחידות עודפות מ- X שאינן נותנות לו תועלת – אם נעביר אותן לפרט B הלינארי נשפר את מצבו מבלי לפגוע במינימום ולכן נבצע שיפור פארטו (ונגיע ל- G). מכאן, F -אינה יעילה. ובאופן דומה – כך כל הקצאה פינתית אחרת.

סעיף ג' – פרט B קוב-דאגלס

- מבחינת ההקצאות הפנימיות אין שינוי – בהתאם לטיפ – קו החוזה הפנימי הוא $y_A = x_A$.
- מבחינת ההקצאות הפינתיות – נראה כי כאשר יש פרט קוב-דאגלס מול מינימום אז למעשה כלל האצבע "הרגיל" של קו החוזה הכולל שוב תקף! כלומר – קו החוזה הכולל (פנימי + פינתי) עולה משמאל לימין (מראשית לראשית) – כרגיל. כלומר, אנחנו יודעים להגיד שבמצב זה הדופן שכינינו אותה "הדופן הרלוונטית" – תהיה יעילה.
- במקרה שלנו :



הסבר מפורט : על הדופן הרלוונטית שהקפנו יש מצד אחד יותר X מ- Y לפרט A המינימום, אך מצד שני לפרט B ה- CD יש אפס Y וכמות חיובית של X – כלומר תועלתו אפס וה- X מיותר גם מבחינתו. אם ננסה לשפר כמו קודם במעבר מנקודה על הדופן (כמו F של מקודם) לכיוון קו האופטימום של המינימום (כלומר ל- G של מקודם, כלומר להעביר X מפרט A לפרט B) מצבם של שני הפרטים לא ישתנה (ה- CD עדיין יישאר אפס ול- A גם ככה ה- X ים העודפים לא נתנו כלום) ולכן לא נבצע שיפור פארטו. יתרה מזאת, כל שינוי אחר שננסה לעשות (למשל ללכת מנקודה F לתוך התיבה) יגרור שיפור במצב אחד הפרטים ופגיעה בשני, כלומר לא נוכל לבצע שיפור פארטו. מכאן, שהדופן הרלוונטית יעילה.

{ניתן גם באופן דומה להראות שבדפנות האחרות כן נוכל לבצע שיפור פארטו ולכן הן אינן יעילות}